

# Tolerance Design – Confronto tra metodo tradizionale (WCA) e metodo statistico (RSS)

Ing. Pier Giorgio DELLA ROLE – Six Sigma Master Black Belt

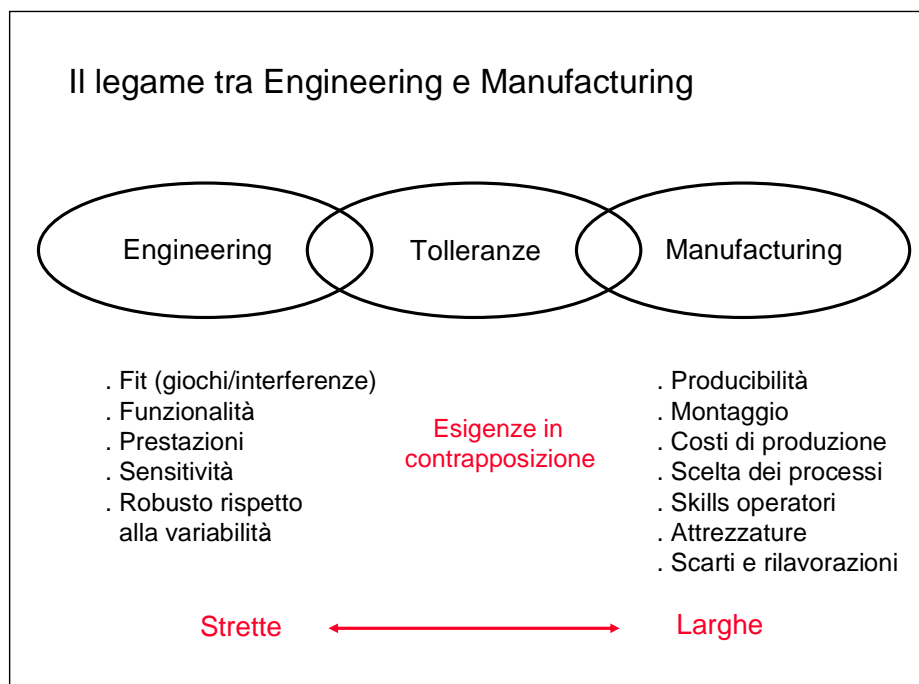
## 1. Introduzione

C'è un interesse crescente nell'industria per il tema delle "tolleranze".

Le richieste dei clienti per prodotti di qualità ha focalizzato l'attenzione sugli effetti che la variabilità (dei singoli componenti il prodotto) ha sui costi e sulle performance del prodotto finale.

Un costo eccessivo o delle prestazioni scadenti possono avere effetti negativi sulle quote di mercato e di conseguenza la corretta definizione delle tolleranze sia sulle dimensioni che sulle caratteristiche dei componenti è diventata una competenza di vitale importanza per la funzione Engineering.

In aggiunta la definizione delle tolleranze influenza molti aspetti produttivi come si può vedere nella figura seguente:



Il principale interesse del progettista è la funzionalità dell'assieme. Le varie parti che lo compongono devono, una volta costruite con le tolleranze specificate e assemblate, fornire l'output desiderato. D'altro canto il tecnologo è in primo luogo attento al valore delle tolleranze perché dal loro valore dipendono la scelta dei processi e i costi di produzione.

I metodi di allocazione delle tolleranze devono tenere in considerazione i due aspetti fondamentali citati sopra : **funzionalità e manufacturability**.

La “**robustezza**” di un prodotto misurabile tramite gli indici Cp e Cpk tiene conto di questo duplice aspetto e deve essere una responsabilità congiunta tra il progettista e il tecnologo di produzione (vedere figura seguente):

## Design for Manufacturability

L'utilità dell'indice Cp consiste nel bilanciare la responsabilità sulla qualità del prodotto tra il progettista ed il tecnologo di produzione.

$$Cp = \frac{\text{ESIGENZE ENGINEERING}}{\text{VARIABILITA' DEL PROCESSO PRODUTTIVO}}$$

*Controllate dal Progettista*  
↙  
*Controllata dal Tecnologo* ↘

**. PROGETTAZIONE:** Aumentare il numeratore cioè allargare le tolleranze al massimo valore consentito per il corretto funzionamento del prodotto

**. PRODUZIONE:** Diminuire il denominatore cioè ridurre la variabilità del processo produttivo e centrare il suo valore medio sul valore target

Nel campo del calcolo delle tolleranze si possono distinguere due approcci e precisamente:

### 1. Tolerance Analysis

Nell'analisi delle tolleranze, le tolleranze dei componenti sono note e viene calcolata la tolleranza dell'assieme.

### 2. Tolerance Allocation

La "tolerance allocation" è il processo opposto. Sono note le esigenze (tolleranze) dell'assieme e occorre determinare le tolleranze dei componenti. Di conseguenza la tolleranza dell'assieme va distribuita sui vari componenti in modo razionale.

La figura che segue riporta invece i modelli oggi in uso per il "Tolerance Design".

Seguirà un esempio di applicazione relativo alla "Tolerance Allocation" applicando il modello di "proportional scaling" e usando dapprima il metodo tradizionale o Analisi del Caso Peggior (Worst Case Analysis - WCA) e poi successivamente il metodo statistico (Root Sum of Squares – RSS).

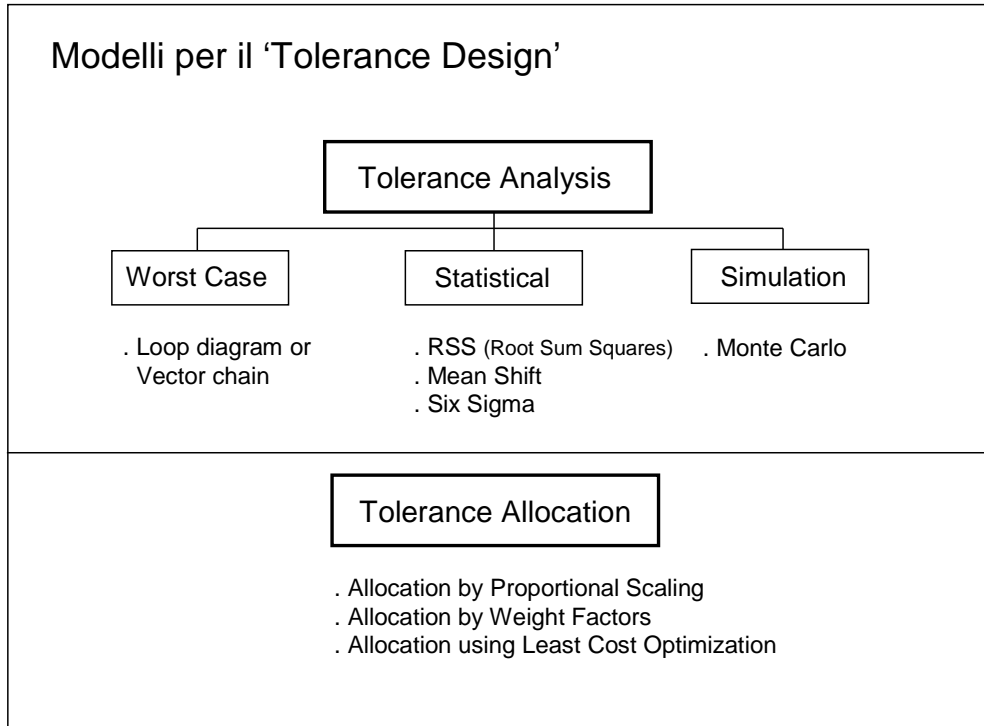
## 2. Metodo per l'analisi di una catena di tolleranze lineari

Solitamente l'obiettivo di tale analisi è quello di predire la variazione dimensionale di un "gioco" come conseguenza di una operazione di montaggio.

La procedura da usare è la seguente:

1. Tutte le dimensioni e tolleranze che non sono bilaterali, vanno convertite in tolleranze bilaterali uguali;

2. Si consiglia, per i disegni complessi, di creare un “loop diagram”;
3. Usando il “loop diagram”, calcolare la dimensione nominale del gioco;
4. Calcolare i limiti dimensionali del gioco e la massima variazione attesa adottando il modello delle tolleranze più appropriato (WCA o RSS).

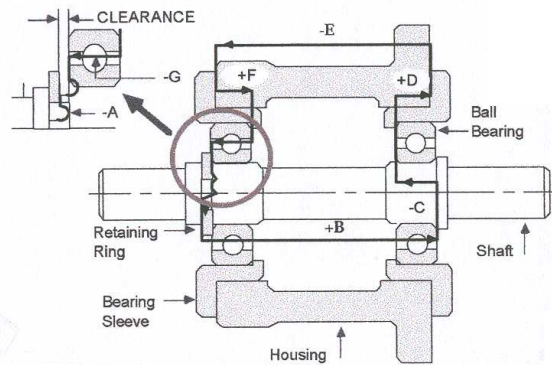


Come esempio di applicazione sceglieremo lo “Shaft and Housing Assembly” riportato in figura.

In esso si distinguono due tipi di dimensioni e relative tolleranze:

- Fixed                      sono dimensioni e tolleranze che non si possono variare in quanto provengono da particolari di grande serie comprati a catalogo da un fornitore esterno;
  
- Design                    Sono dimensioni e tolleranze che il progettista può variare al fine di raggiungere l’obiettivo prefissato.

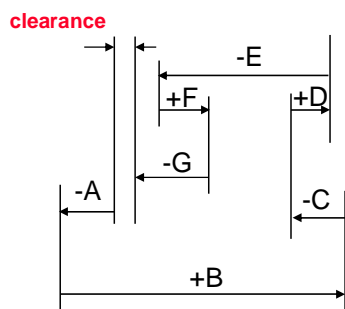
## Example: Shaft and Housing Assembly



I dati di partenza delle diverse dimensioni con relative tolleranze sono riportate nella figura sottostante unitamente al risultato atteso di "clearance".  
Viene costruito anche un "loop diagram" per facilitare il calcolo.

## Esempio: Proportional Scaling

Loop Diagram



Data

	Nom	Toll	Type
A	0.0505	0.0015	fixed
B	8.0000	0.0080	design
C	0.5093	0.0025	fixed
D	0.4000	0.0020	design
E	7.7110	0.0060	design
F	0.4000	0.0020	design
G	0.5093	0.0025	fixed

Required clearance : 0.020 +/- 0.015

Fixed: non possono essere modificate (da fornitore esterno)

Dato che la variazione dimensionale della “clearance” non è quella richiesta dal progettista (+/- 0.015) per un corretto funzionamento dell’insieme, ma è maggiore (+/-0.0245), viene usato il modello di “proportional scaling” unitamente al metodo WCA.

Si ricorda che le uniche tolleranze modificabili sono quelle “design”.

**Worst Case Analysis**

	Nom	Toll	Type
A	-0.0505	0.0015	fixed
B	8.0000	0.0080	design
C	-0.5093	0.0025	fixed
D	0.4000	0.0020	design
E	-7.7110	0.0060	design
F	0.4000	0.0020	design
G	-0.5093	0.0025	fixed
<b>Totale</b>	<b>0.020</b>	<b>0.0245</b>	

0.0245 è troppo grande in confronto al 0.015 richiesto

$T_{asm} = 0.015 = 0.0015 + 0.0025 + 0.0025 + P(0.008 + 0.002 + 0.006 + 0.002)$

**P = proportionality factor = 0.47222**

$T_b = 0.47222 (0.008) = 0.00378$        $T_e = 0.47222 (0.006) = 0.00283$   
 $T_d = 0.47222 (0.002) = 0.00094$        $T_f = 0.47222 (0.002) = 0.00094$

Il risultato applicando il WCA (Worst Case Analysis) è che le tolleranze modificabili (classificate come design) **devono essere ridotte** cioè vanno moltiplicate per un fattore pari a **0.47222**.

Vediamo ora la stessa analisi eseguita col modello statistico RSS (Root Sum of Squares).

I quattro presupposti per applicare il modello statistico sono:

1. Le tolleranze dei singoli componenti sono indipendenti. Cioè ogni tolleranza compresa nel “loop” non è funzione di un’altra tolleranza del “loop”;
2. I processi con cui sono prodotti i singoli componenti sono in controllo statistico e seguono una distribuzione normale;
3. La capability dei processi con cui sono prodotti i componenti viene considerata essere pari a +/- 3 sigma;
4. La media dei processi è centrata sulla valore medio della tolleranza.

### Root Sum of Squares (RSS)

	Nom	Toll	Type
A	-0.0505	0.0015	fixed
B	8.0000	0.0080	design
C	-0.5093	0.0025	fixed
D	0.4000	0.0020	design
E	-7.7110	0.0060	design
F	0.4000	0.0020	design
G	-0.5093	0.0025	fixed
Totale	0.020	0.0245	

0.0245 è troppo grande  
in confronto al 0.015  
richiesto

$$T_{asm} = 0.015 = \sqrt{0.0015^2 + 0.0025^2 + 0.0025^2 + P^2(0.008^2 + 0.002^2 + 0.006^2 + 0.002^2)}$$

**P = proportionality factor = 1.39526**

$$T_b = 1.39526 (0.008) = 0.01116 \quad T_e = 1.39526 (0.006) = 0.00837$$

$$T_d = 1.39526 (0.002) = 0.00279 \quad T_f = 1.39526 (0.002) = 0.00279$$

Il risultato che ne segue è notevolmente diverso da quello WCA.

In questo caso le tolleranze dei componenti "design" **possono essere ampliate** di un fattore pari a **1.39526** con dei costi di fabbricazione ridotti.

In questo caso però ci dobbiamo aspettare una difettosità dell'assieme (cioè di assiemi la cui clearance non è quella richiesta) pari a 27 unità ogni 10000 assiemi, che è quella tipica di un processo 3 sigma centrato (99.73% assembleability).

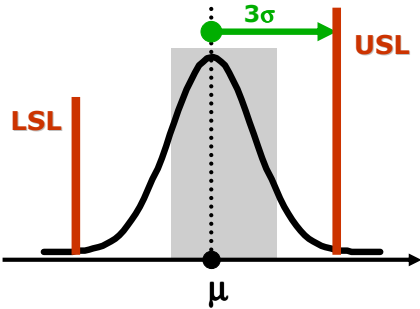
### Tabella di confronto

Dim	Original tolerances		Type	Proportional	
	Nom	Toll		Worst Case	RSS
A	-0.0505	0.0015	fixed	0.0015	0.0015
B	8.0000	0.0080	design	0.00378	0.01116
C	-0.5093	0.0025	fixed	0.0025	0.0025
D	0.4000	0.0020	design	0.00094	0.00279
E	-7.7110	0.0060	design	0.00283	0.00837
F	0.4000	0.0020	design	0.00094	0.00279
G	-0.5093	0.0025	fixed	0.0025	0.0025
Assembly tolerance	0.020	0.0245		0.0150	0.0150
<b>Scale factor (P)</b>				<b>0.47222</b>	<b>1.39526</b>

### 3. Modello RSS (Root Sum of Squares) – Mean Shift

**Root Sum of Squares (RSS) – Mean Shift**

Si tiene conto delle incertezze dovute principalmente ad uno spostamento (shift) del processo e ad un processo che può non essere normale.



The diagram shows a normal distribution curve on a horizontal axis. The mean is labeled  $\mu$ . Two vertical red lines represent the Lower Specification Limit (LSL) on the left and the Upper Specification Limit (USL) on the right. A green arrow labeled  $3\sigma$  indicates the distance from the mean to the USL. A grey shaded area is shown under the curve between the mean and the USL.

Si introduce quindi un fattore di correzione 'K'

$$T_{asm} = K \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$$

Tale fattore K assume valori compresi tra 1.4 e 1.7

Il risultato finale sarà compreso tra WCA e RSS.

In pratica le condizioni richieste dal metodo RSS non sono sempre rispettate, soprattutto i processi manifatturieri non producono secondo una distribuzione normale oppure il valore medio non è abbastanza vicino al valore nominale.

Il teorema del Limite Centrale, tuttavia, stabilisce che, indipendentemente dalle tolleranze coinvolte, se il numero dei componenti la catena è grande, il gioco risultante si avvicinerà ad una distribuzione normale.

A volte succede che nella catena vi è una tolleranza "dominante" la quale non presenta una distribuzione normale. In questo caso vi deve essere un alto numero di tolleranze minori per compensare la non normalità della tolleranza dominante.

Da quanto detto sopra è nata la necessità del fattore "K" di correzione.

Il valore suggerito più frequente è 1.5.

Esiste tuttavia una formula proposta da P. Drake e D. Van Wyk:

$$K = \frac{0.5 ( T_{wc} - T_{rss} )}{T_{rss} (\sqrt{n} - 1)} + 1$$

## 4. Tabella di confronto tra i modelli

Modelli - Tabella di confronto			
Modello	Formula	Risultato	Applicazione
WCA Worst Case Analysis	$T_{asm} = \sum  T_i $	Non statistico. Probabilità bassa di verificarsi.	Usato per sistemi critici dove non sono ammessi scarti. Molto costoso.
RSS Statistico	$\sigma_{asm} = \sqrt{\sum (T_i/3)^2}$	Statistico. Consente il calcolo della % di scarti.	Usato per sistemi dove sono ammessi scarti. Meno costoso.
Six Sigma Statistico	$\sigma_{asm} = \sqrt{\sum (T_i/3C_{pk})^2}$	Statistico. Consente il calcolo della % di scarti.	Usato per sistemi dove è richiesta una qualità elevata.
Dati misurati	$\sigma_{asm} = \sqrt{\sum \sigma_i^2}$	Statistico usando dati reali. Consente valutazione % scarti	Usato quando si è già in produzione. "what if" analisi.

In conclusione si voleva evidenziare la differenza tra WCA (Analisi del Caso Peggior) e modello statistico RSS (Root Sum of Squares) che si può così riassumere:

### WCA

Assicura il 100% di intercambiabilità e non tiene conto del tipo di distribuzione delle tolleranze. Il numero dei componenti la catena di tolleranze può essere qualsiasi.

Presenta due inconvenienti:

- la probabilità di avere tutti i componenti al minimo o al massimo della tolleranza è bassissima
- quando i componenti la catena sono tanti, per assicurare la tolleranza richiesta sull'assieme, tale metodo richiede delle tolleranze strette sui componenti con possibili alti costi di produzione

### RSS

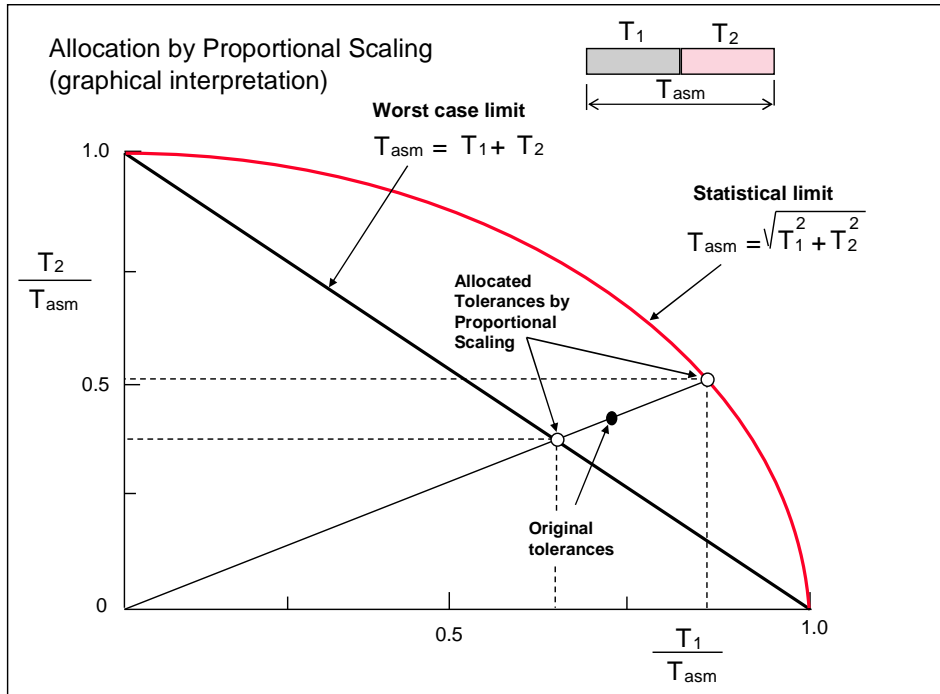
Consigliato quando la catena di tolleranze comprende almeno 4 componenti la cui distribuzione si conosce essere normale.

Quando sono verificati i presupposti elencati a pagina 5, si possono verificare scarti, sulla dimensione finale richiesta dell'assieme, propri di un processo 3 sigma centrato cioè pari a 0.27% (99.73% assembleability).



# Appendice

## Le formule del Tolerance Design e l'interpretazione grafica



Il termine RSS (Root Sum of Squares) deriva dal fatto che quando si sommano o si sottraggono due distribuzioni (come in una catena di tolleranze) le medie sono additive, ma le deviazioni standard non lo sono.

Occorre quindi passare dalle deviazioni standard alle varianze e tenere presente che ogni qualvolta si combinano delle distribuzioni, la variazione aumenta sempre.

**Conclusioni**

1. Somma di distribuzioni      2. Differenza di distribuzioni

$$\bar{X}_{A+B} = \bar{X}_A + \bar{X}_B \qquad \bar{X}_{A-B} = \bar{X}_A - \bar{X}_B$$

$$S_{A+B}^2 = S_A^2 + S_B^2 \qquad S_{A-B}^2 = S_A^2 + S_B^2$$

$$S_{A+B} = \sqrt{S_A^2 + S_B^2} \qquad S_{A-B} = \sqrt{S_A^2 + S_B^2}$$

RSS = Root Sum of Squares